TITLE:

2階非線型楕円型方程式とそれに関連する話題について (ポテンシャル論と偏微分方程式)

AUTHOR(S):

草野, 尚

CITATION:

草野, 尚. 2階非線型楕円型方程式とそれに関連する話題について (ポテンシャル論と偏微分方程式). 数理解析研究所講究録 1968, 58: 1-25

ISSUE DATE:

1968-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/107820

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
58巻 1968年 1-25

2階非線型楕円型方程式と
それに関連する話題について

早大 理工　　草 野 尚

§1. はじめに

2階準線型楕円型方程式について考える．その一般形は

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,u_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,u,u_x)$$

(a_{ij}) は positive definite matrix,　$u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$

であるが，所謂 divergence structure をもつ準線型方程式

$$\text{(B)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,u,u_x) = f(x,u,u_x)$$

$(\partial a_i/\partial u_{x_j})$ は positive definite matrix

が，力学や幾何学の重要な問題に関連して現われる関係上，殊のほかよく研究される．正則変分問題 $\int F(x,u,u_x)dx = \min$ の Euler-Lagrange 方程式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}$$

は (B) の代表例のひとつである．また

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,u,u_x)$$

の形の方程式も (B) 型と考えて取扱うことができる．

Hilbert が問題を提起して以来，S. Bernstein をはじめとして

多くの人達が，このような方程式の解の regularity や境界値問題の solvability の問題と取組んで来たが，主要な関心は方程式の解の'a priori estimates'（a priori bounds）を求めることに注がれた．a priori estimates と言うのは，与えられた方程式の解が存在することを仮定した上で，解とその導関数を（種々のノルムで）評価することである．

a priori estimates がどのように使われるか，その効用を方程式（A）に対する Dirichlet 問題を例にとって大ざっぱに示そう．

線型楕円型方程式に関する理論（例えば Schauder theory）を既知とする．（A）の係数と右辺に関数 v およびその1階導関数 v_x を挿入し，得られた線型楕円型方程式に対する Dirichlet 問題を解く．v にこの解 u を対応させると一つの写像 T がえられる：$u = Tv$．u の滑らかさは v のそれよりも高くなるから，T は compact な写像になる．このような線型方程式の解に対して，係数の滑らかさに殆んど影響されないような a priori estimates が得られるならば，T は適当な関数の集合をそれ自身の中に写すことが立証される．T の連続性を示せば，Schauder の不動点定理を適用することができて，T は不動点（すなわち（A）の解）を持つことが示される．かくして，係数や右辺の滑らかさに関する最少の仮定の下で線型方程式の解を a priori に評価することが極めて重要な問題にな

る．これが近年いわゆる‘不連続係数をもつ線形楕円型方程式の理論’の発展を促した主な原因である．（勿論，transmission problem のようにこの様な理論を必要とする線形問題もある．）

もっと一般な方法は，非線型問題そのものの解に対する a priori estimates を求めることである．与えられた非線型方程式の構造をよく調べ，その構造に依存する解の評価法を案出する．さて，方程式 (A) を準線型楕円型方程式のある1助変数族 (A_σ)，$0 \leqq \sigma \leqq 1$ に埋め込む．もとの方程式は (A_1) とし，方程式 (A_0) は solvable であるとする．すべての (A_σ) の解に対して a priori estimate，例えば，可能なあらゆる解 $u(x;\sigma)$ があるノルムで有界 $\|u(x,\sigma)\| \leqq K$ という事実が分ったとすると，$\|\cdot\|$ をノルムとする Banach 空間の球 $\|u\| \leqq K$ において Leray-Schauder の写像度の理論を適用することができる．得られた a priori estimate は解が球 $\|u\| \leqq K$ の境界と交わらないことを保証するから，(A_0) から始まるすべての方程式 (A_σ) は解をもつこと，特に $(A_1) \equiv (A)$ は解をもつことが言える．

a priori に評価するべき量の中で重要なものは

$$\max|u|,\ \max\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|,\quad [u]_\alpha,\ \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_\alpha \qquad \left(\text{但し } [v]_\alpha = \sup\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)$$

で，これらを評価するために多くの technique が考案されている．また，このような評価や評価の解析的技術を利用するこ

とによって，境界値問題の solvability ばかりでなく，楕円型方程式に関する諸問題が成功裡に研究されている．

本報告では，上述のような視点から，2階の楕円型方程式（線型，非線型）の近代的理論の一局面を紹介する．

§2. 不連続係数をもつ線型楕円型方程式

I. 2変数の場合．これは 1938 年の論文 Morrey [11] によって創められ，1954年の Nirenberg の論文で完結した [15] もので，quasi-conformal mappings の美しい理論と密接に結びついている．

Lemma. $p(x,y)$, $q(x,y)$ は Ω で 1 回連続微分可能，絶対値は定数 K でおさえられているとする．さらに，p, q は Ω で

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leqq k(p_y q_x - p_x q_y) + k_1 \qquad (k, k_1 = \mathrm{const.})$$

を満たすとする．そのとき，Ω の任意の compact subset Ω' において p, q は Hölder 連続で，その指数と係数は K, k, k_1, 及び $\mathrm{dist.}(\Omega', \partial\Omega)$ だけに depend する．

Theorem. $z(x,y)$ は Ω で楕円型方程式

$$A z_{xx} + B z_{xy} + C z_{yy} = D$$

を満たすとする．次の仮定をおく．

(i) A, B, C, D は有界な関数（絶対値は K より小）

(ii)　z は 2回連続微分可能．z_x, z_y の絶対値は K_1 より小．

(iii)　$A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2 \geqq \lambda(\xi^2+\eta^2)$,　$\lambda=\text{const.}>0$

このとき，Ω の任意の compact subset Ω' において z_x, z_y は Hölder 連続で，その指数，係数は K, K_1, λ, $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ だけに depend する．

この定理は，本質的には A, B, C, D の有界性の仮定だけから，解の 1 階導関数の Hölder 連続性の評価が得られるという著しい事実を明かにしている．前§で触れたように，この事実は非線型問題の研究に非常に有用である．

II．多変数の場合．　3次元以上の場合には，quasi-conformal mappings のような関数論の手法が使えないので，全く違った新しい評価法を開発しなければならない．この長年にわたる懸案を解決する緒を与えたのは，1957年の E. de Giorgi の論文 [4]，1958年の Nash の論文 [14] である．De Giorgi は次の定理を証明した．

Theorem.　一様楕円型方程式

$$(*)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0,\qquad m|\xi|^2\leqq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\leqq M|\xi|^2\quad(m, M>0\ \text{const.})$$
$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$$

の weak solution $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ は Ω で locally Hölder continuous である．

De Giorgi はこの結果を使って一様な楕円的変分問題

$$\int F(u_x)\,dx \to \min$$

の解の analyticity を証明した．この解の 1 階導関数は (*) 型の方程式の弱い形

$$\int \sum_{j,k=1}^{n} F_{u_j u_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_k}\, dx = 0, \qquad \forall \zeta \in C_0^\infty$$

を満たすこと，かつ $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ なることが分る．従って上の定理によって，$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ は Hölder 連続になり，従前知られている結果によって u は analytic になるというのである．

De Giorgi の結果（内部だけの評価）は其の後種々の境界条件を満足する解に拡張され，非線型境界値問題の研究に威力を発揮している．

(a) 一般な線型方程式．

$$(1)\quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x)u\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f \quad \text{in } \Omega$$

仮定：
$$\begin{cases} \nu|\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqq M|\xi|^2, \\ a_i,\ b_i \in L^q(\Omega), \quad a \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega), \quad f_i, f \in L^q(\Omega), \quad q > n \end{cases}$$

任意の $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して（従って任意の $\zeta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ に対して）

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u - f_i\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + au - f\right)\zeta\right] dx = 0$$

をみたす関数 $u(x) \in \overline{W}{}_2^1(\Omega)$ を方程式 (1) の解 (weak solution) という．

(b) 最大値原理

簡単な微分不等式

(2) $Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $\quad [\ \leqq\ ]$

を考える. $u(x) \in \overline{W}_2^1(\Omega)$ が L-subsolution [L-supersolution] とは

(3) $\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\,dx \leqq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\,dx$ $\quad [\ \geqq\ ],\quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega),\ \zeta \geqq 0$

が満たされることを言う.

Theorem. (Stampacchia [23], [24])

$u(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \overline{W}_2^1(\Omega)$ が L-subsolution [L-supersolution] ならば

$$\max_{\Omega} u(x) \leqq \max_{\partial\Omega} u(x) + \frac{C(q,n)}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\min_{\Omega} u(x) \geqq \min_{\partial\Omega} u(x) - \frac{C(q,n)}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \right)$$

証明には次の Lemma の (i) が使われる.

Lemma. $\varphi(t)$ は $t \geqq k_0$ で non-negative, non-increasing, かつ

$$\varphi(h) \leqq \frac{C}{(h-k)^\alpha}[\varphi(k)]^\beta \quad \text{for } h > k \geqq k_0 \qquad (\ C, \alpha, \beta \text{ は正の const.}\ )$$

を満たすとする. そのとき

(i) $\beta > 1$ ならば $\quad \varphi(k_0 + d) = 0, \qquad d^\alpha = C[\varphi(k_0)]^{\beta-1} 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}$.

(ii) $\beta = 1$ ならば $\quad \varphi(h) \leqq e \cdot \exp[-\xi(h-k_0)]\varphi(k_0), \qquad \xi = (eC)^{-\frac{1}{\alpha}}$

(iii) $\beta < 1$ ならば $\quad \varphi(h) \leqq 2^{\frac{\mu}{1-\beta}} \left\{ C^{\frac{1}{1-\beta}} + (2k_0)^\mu \varphi(k_0) \right\} h^{-\mu}, \qquad \mu = \frac{\alpha}{1-\beta}$

Theorem の証明のあらまし.

$\zeta = \max\ (u-k,\ 0)$, $k > \max_{\partial\Omega} u$; $A(k) = \{x \in \Omega;\ u(x) \geqq k\}$ とおく.

(3) 式から

$$\nu \int_{A(k)} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \leqq \int_{A(k)} \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \leqq \left(\int_{A(k)} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hölder 不等式から

$$\nu \left(\int_{A(k)} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)} [\mathrm{mes}\, A(k)]^{\frac{q-2}{2q}}$$

Sobolev 不等式から, 定数 C があって

$$\left(\int_{A(k)} |u-k|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leqq \frac{C}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)} [\mathrm{mes}\, A(k)]^{\frac{q-2}{2q}}, \qquad 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

従って左辺の積分を $A(h)$, $h>k$ に限ると

$$[\mathrm{mes}\, A(h)]^{\frac{n-2}{2n}} \leqq \frac{\frac{C}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)}}{h-k} [\mathrm{mes}\, A(k)]^{\frac{q-2}{2q}}$$

$q > n$ であるから Lemma の (i) を適用すると

$$\sigma(h) = 0 \qquad \text{for} \quad h \geqq \max_{\partial\Omega} u + \frac{C(q,n)}{\nu} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^q(\Omega)} (\mathrm{mes}\, \Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}$$

が得られる. これが Theorem の結論である.

一般の方程式 (1) の解の maximum norm の評価については次の Theorem が成立つ.

Theorem (Ladyzhenskaya - Ural'tseva [7])

$u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ を方程式 (1) の weak solution とする.

(i) 任意の $\Omega' \subset \Omega$ に対して $\operatorname{ess.max}_{\Omega'} |u(x)|$ は有限で, ν, M, q, $\|a_i, b_i, f_i, f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|a\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}$, $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ と $\operatorname{dist.}(\Omega', \partial\Omega)$ だけに依存する const. によって上から評価される.

(ii) $\operatorname{ess.max}_{\partial\Omega} |u(x)| < \infty$ ならば, $\operatorname{ess.max}_{\Omega} |u(x)|$ は有限で, ν, M, q, $\|a_i, b_i, f_i, f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|a\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}$, $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ だけに依存する const. によって上から評価される.

証明は非常に面倒なので省略しなければならない. (ii) について大ざっぱに言えば, weak solution の定義の式

$$\int_\Omega \left[\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u - f_i\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \left(b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au - f\right) \zeta \right] dx = 0$$

において, $\zeta = \max(u-k, 0)$, $k \geqq \operatorname{ess.max}_{\partial\Omega} |u|$ とおいて適当な計算を行うと

$$\int_{A(k)} |\operatorname{grad} u|^2 dx \leqq \gamma \left[\int_{A(k)} (u-k)^2 dx + (k^2+1)(\operatorname{mes} A(k))^{1-\frac{2}{q}} \right]$$

が得られる. γ は ν, M, q etc. だけに依存する定数. すると, (ii) の結論は次の Lemma から従う.

Lemma. $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega) \cap L^\ell(\Omega)$ は有限な境界値 $\operatorname{ess.max}_{\partial\Omega} u(x)$ を持つとする. $\exists \hat{k} \geqq \operatorname{ess.max}_{\partial\Omega} u(x)$, $\forall k \geqq \hat{k}$ に対して

$$\int_{A(k)} |\operatorname{grad} u|^m dx \leqq \gamma \left[\left(\int_{A(k)} (u-k)^\ell dx \right)^{\frac{m}{\ell}} + \sum_{i=1}^N k^{\alpha_i} (\operatorname{mes} A(k))^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon_i} \right]$$

が成立つと仮定する. ここで, γ, ℓ, α_i, ε_i, N は正の定数で $\ell < q^* = \frac{nm}{n-m}$, $\varepsilon_i > 0$, $m \leqq \alpha_i < \varepsilon_i q + m$ をみたす. そのとき

$\operatorname{ess.max}_{\Omega} u(x)$ は一定の定数で上からおさえられる．その定数は

$\gamma, \ell, N, \alpha_i, \varepsilon_i\ (i=1,\dots,N),\ m, n, q, \hat{k}, \operatorname{mes}\Omega,$ $\begin{cases} \|u\|_{L^1(A(\hat{k}))} & \text{for } q < \frac{nm}{n-m} \\ \|u\|_{L^q(A(\hat{k}))} & \text{for } q \geqq \frac{nm}{n-m} \end{cases}$

だけに depend する．

（C） Hölder 連続性と Harnack 不等式

或る関数やベクトル関数の Hölder 連続性を示すために次の補題が極めて有用である．

Lemma. I) $u(x)$ は球 $K = K(\rho_0)$ で有界で，$\forall \rho < \frac{1}{3}\rho_0$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{K(\rho)} u \leqq \nu \operatorname*{osc}_{K(3\rho)} u + \varepsilon(\rho) \qquad (0 < \nu < 1)$$

を満たすとする．$\varepsilon(\rho)$ は ρ の非減少関数．そのとき，任意の $\rho < \rho_0$ と $\alpha < 1$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{K(\rho)} u \leqq C(\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\delta} \operatorname*{osc}_{K} u + \varepsilon(\rho^{\alpha} \rho_0^{1-\alpha}) \right\}$$

が成立つ．$\delta > 0$ は ν と α に depend する．

II) $\{u_1, \dots, u_N\}$ と $\{w_1, \dots, w_{N_1}\}$ は K 上で有界な関数の系とする．$\forall \rho < \frac{1}{3}\rho_0$ に対して一つの w_r があって

$$\begin{cases} \operatorname*{osc}_{K(3\rho)} w_r \geqq \delta_0 \operatorname*{osc}_{K(3\rho)} u_i, & i = 1, \dots, N \\ \operatorname*{osc}_{K(\rho)} w_r \leqq \nu \operatorname*{osc}_{K(3\rho)} w_r + \varepsilon(\rho) \end{cases}$$

（$0 < \nu < 1$, $\varepsilon(\rho)$ は非減少関数）

が成立つとする．しからば，$\forall \rho < \rho_0$, $\forall \alpha < 1$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{K(\rho)} u_i \leqq C \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\delta} w_0 + \varepsilon(\rho^{\alpha} \rho_0^{1-\alpha}) \right\}, \quad i = 1, \dots, N$$

$C = C(\nu, \delta_0, N_1)$, $\delta > 0$ は ν, N_1, α に depend, $w_0 = \max_{l=1,\cdots,N_1} \operatorname{osc}_K w_l$.

領域の境界附近における Hölder ノルムを評価するためには，領域の境界の形状と滑らかさについて或る種の仮定を設ける必要がある．そうすれば，内部評価と類似の評価がえられる．

Ladyzhenskaya–Ural'tseva [7] は De Giorgi の方法を発展させて一般形の方程式 (1) の weak solution が Hölder 連続になることを証明した．彼女等は先ず次のような関数空間を導入する．

$$\mathcal{B}_m(\Omega, M, \gamma, \delta, \tfrac{1}{q}) \ni u(x)$$

$\Leftrightarrow$ $\quad u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, $\quad \operatorname{ess.max}_{\Omega} |u(x)| \leqq M$

$v = u$ 及び $-u$ は $\forall K(\rho) \subset \Omega$ と $\forall \sigma \in (0,1)$ に対して

$k \geqq \max_{K(\rho)} v - \delta$ のとき

$$\int_{A(k,\rho-\sigma\rho)} |\operatorname{grad} v|^m dx \leqq \gamma \left[\frac{1}{\sigma^m \rho^{m(1-\frac{n}{q})}} \max_{A(k,\rho)} [v(x) - k]^m + 1 \right] (\operatorname{mes} A(k,\rho))^{1-\frac{m}{q}}$$

$A(k,\rho) = \{ x \in K(\rho) ;\ v(x) > k \}$

M, γ, δ は任意の正の数，$1 < m \leqq n$, $q > n \geqq 2$ （$q = \infty$ も許す）

そして，この $\mathcal{B}_m(\Omega, M, \gamma, \delta, \frac{1}{q})$ に属する関数が Ω の内部で Hölder 連続になることを示す．

Theorem. $u(x) \in \mathcal{B}_m(\Omega, M, \gamma, \delta, \frac{1}{q})$ とする．$K(\rho_0) \subset \Omega$ ($\rho_0 \leqq 1$) とする．そのとき，任意の同心球 $K(\rho)$, $\rho \leqq \rho_0$ に対して

$$\operatorname{osc}_{K(\rho)} u \leqq c \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}$$

が成立つ．但し　$\alpha = \min\left\{ -\log_4\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right),\ 1-\frac{n}{q} \right\}$，　$c = 4^{\alpha} \max\left\{2M,\ 2^s \rho_0^{1-\frac{n}{q}}\right\}$

で，s は $\frac{M}{2^{s-3}} \leqq \delta$ をみたす．α も c も Ω の大きさに関係しない．

境界も含めた $\overline{\Omega}$ における Hölder 連続性についても似たような取扱いが可能である．$\partial\Omega$ に適当な滑かさを要求する．

方程式（1）の解の Hölder 連続性は上述の定理を用いて証明される．結果は次の通り．

Theorem. $u(x)$ を方程式（1）の weak solution $\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ とする．

（i）$\forall \Omega' \subset \Omega$ に対して $u(x) \in C^{\alpha}(\Omega')$ である．$\alpha > 0$ 及び $|u|_{\alpha,\Omega'}$ は，ν, M, q, $\|a_i, b_i, f_i, f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|a\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}$, $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, $dist(\Omega', \partial\Omega)$ だけに depend する定数で上からおさえられる．

もし，$\underset{\Omega}{ess.\max} |u(x)| = \overline{M} < \infty$ ならば $u(x) \in C^{\alpha}(\Omega)$ になる．$\alpha > 0$ は ν, M, q, $\|a_i, \dots, f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|a\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}$, $\overline{M}$ のみに depend する．

（ii）$\partial\Omega$ が適当に regular で，$u|_{\partial\Omega} \in C^{\beta}(\partial\Omega)$ ならば，$u(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ になり，$|u|_{\alpha,\Omega}$ は，ν, M, q, $\|a_i, \dots, f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|a\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}$, $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ β, $|u|_{\beta,\partial\Omega}$ 及び $\partial\Omega$ だけに depend する定数によっておさえられる．

例えば（i）について言うと，方程式（1）の weak solution の定義式の ζ として $\zeta = \eta^2(x)\max(u(x)-k,\ 0)$ をとる．ここで $\eta(x)$ は球 $K(\rho) \subset \Omega$ に対する cut-off function である．その式を Hölder 不等式や Sobolev 不等式を用いて変形する．$\rho > 0$ を適当に小さ

くすると $\overline{M} = \operatorname{ess.max}_{\Omega} |u| \geqq k > -\infty$ なる k に対して

$$\int_{A(k,\rho)} |\operatorname{grad} u|^2 \eta^2 dx \leqq \gamma' \left[\int_{A(k,\rho)} (u-k)^2 |\operatorname{grad} \eta|^2 dx + (k^2+1)(\operatorname{mes} A(k,\rho))^{1-\frac{2}{q}} \right]$$

が成立つことが分る．$\sigma \in (0,1)$ を任意にとり，$\eta(x)$ として $K(\rho-\sigma\rho)$ で 1 に等しく，$|\operatorname{grad} \eta| \leqq \frac{c}{\sigma\rho}$ を満たすような $K(\rho)$ の cut-off function をとれば

$$\int_{A(k,\rho-\sigma\rho)} |\operatorname{grad} u|^2 dx \leqq \gamma \left[\frac{1}{\sigma^2 \rho^{2(1-\frac{2}{q})}} \max_{A(k,\rho)} (u-k)^2 + 1 \right] (\operatorname{mes} A(k,\rho))^{1-\frac{2}{q}}$$

が得られる．$-u(x)$ についても同様．つまり，方程式 (1) の有界な weak solution はすべて $\mathcal{B}_2(\Omega, \overline{M}, \gamma, \infty, \frac{1}{q})$ に属することが示された．従って $u(x)$ は Ω において Hölder 連続になる．

解の Hölder 連続性の問題に関連してどうしても触れておかなければならないのは Harnack 不等式である．正の調和関数に関する古典的な Harnack の定理を一般の楕円型方程式の解に拡張しようという試みは，2変数の場合 Bers-Nirenberg [3] により，更に一般に Serrin [19] によって行われた．その結果 2変数の方程式に対しては，係数の連続性を仮定しなくても解が Harnack 不等式をみたすことが証明された．しかし多次元の場合にはうまく行かず，Harnack 不等式を導こうとすれば係数が連続であることを仮定から外すことが出来なかったのである．この困難を克服したのが Moser [13] である．Moser

は極めて独創的で有効な方法を編み出して次の事実を証明した。

Theorem. $u(x)$ が一様楕円型方程式

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad m|\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqq M|\xi|^2$$

の non-negative weak solution in Ω で、Ω' が Ω の compact subset ならば

$$\max_{\Omega'} u \leqq c \min_{\Omega'} u$$

が成立つ。 c は m, M, Ω', Ω のみに depend する。

これが言えると Hölder 連続性は次のようにして示される。簡単のために球 $\{|x|<1\}$ を基礎領域にとる。上の定理の Ω, Ω' として $\{|x|<r\}$, $\{|x|<r'=\frac{r}{3}\}$ $(r<1)$ をとる。

$$M(r) = \max_{|x|\leqq r} u, \quad \mu(r) = \min_{|x|\leqq r} u$$

とおき、さらに $M=M(r)$, $M'=M(r')$; $\mu=\mu(r)$, $\mu'=\mu(r')$ とおく。

$M-u$, $u-\mu$ は同じ方程式の non-negative solutions であるから、上定理によって

$$\max_{|x|\leqq r'}(M-u) = M-\mu' \leqq c(M-M') = c\min_{|x|\leqq r'}(M-u)$$

$$M'-\mu \leqq c(\mu'-\mu)$$

但し c は r に関係しない。加え合わせて変形すると

$$M'-\mu' \leqq \frac{c-1}{c+1}(M-\mu)$$

すなわち、 $\operatorname{osc}_{|x|\leqq r'} u \leqq \theta \operatorname{osc}_{|x|\leqq r} u$ $(\theta<1)$ が得られる。

故に $u(x)$ は Hölder 連続である。

Moserの証明法はその後多くの人達によってうけ継がれ，発展させられ，この種の問題の研究にとって不可欠なものとなっている．証明はむつかしいが，その中でのポイントはJohn-Nirenberg [6]による次のLemmaが適用される所である．

Lemma. K_0はn次元球，KはK_0と同心の部分球とする．$u(x)\in L^1(K_0)$とし，$u_K=\frac{1}{|K|}\int_K u(x)dx$ （$|K|=\mathrm{meas}\,K$）とおく．すべての$K\subset K_0$に対して

$$\frac{1}{|K|}\int_K |u(x)-u_K|\,dx \leqq \gamma$$

が成立つと仮定する．そのとき，すべてのpに対して$u(x)\in L^p(K_0)$である．しかもconst. $\alpha,\beta>0$が存在して

$$\int_{K_0} e^{\alpha u}dx\int_{K_0} e^{-\alpha u}dx \leqq \beta^2 .$$

§3　準線型楕円型方程式（発散形）

divergence structure をもつ準線型楕円型方程式

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,u_x) = f(x,u,u_x)$$

$$[\ \operatorname{div} A(x,u,u_x)=f(x,u,u_x),\qquad A=(a_1,\dots,a_n)\ ]$$

を考える．$u(x)$がΩにおける(1)の有界な weak solution であるとは，$u(x)$が$\operatorname{ess.max}_{\Omega}|u(x)|<\infty$，かつ$\forall\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$に対して

$$(2)\qquad \int_\Omega\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u,u_x)\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}+f(x,u,u_x)\zeta\Big]dx=0$$

$$[\ \int_\Omega[A(x,u,u_x)\cdot\zeta_x+f(x,u,u_x)\zeta]\,dx=0\ ]$$

を満足する $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{m}(\Omega)$ $(m>1)$ 関数であることである.

De Giorgi 以後, 非線型問題で著しい仕事をした人達として Morrey [12], Ladyzhenskaya - Ural'tseva [7], Oleinik - Kruzhkov [16], Stampacchia [22], Gilbarg [5], Serrin [20], [21], Trudinger [25], [26] らの名を挙げることができる.

ここでは, Ladyzhenskaya - Ural'tseva に従って方程式 (1) に対する Dirichlet 問題の solvability について述べる.

(a) 解の Hölder 連続性

Theorem. $a_i(x,u,p)$, $f(x,u,p)$ は $x\in\bar{\Omega}$, $-\infty<u<\infty$, $|p|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i^2}<\infty$ において定義され, 次の不等式に従うとする:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,p)\,p_i \geqq \nu(|u|)\,|p|^m-\mu(|u|)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,u,p)|(1+|p|)+|f(x,u,p)| \leqq \mu(|u|)(1+|p|)^m$$

($m>1$, $\nu(t)$, $\mu(t)$ は $t\geqq 0$ における正の関数)

(i) $u(x)$ が (1) の有界な weak solution ならば $u(x)\in C^{\alpha}(\Omega)$ である. $\alpha>0$ は $M=\operatorname{ess.max}_{\Omega}|u|$, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$ のみに depend し, ノルム $|u|_{\alpha,\Omega'}$ $(\forall\Omega'\subset\Omega)$ は M, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mathrm{dist.}(\Omega',\partial\Omega)$ だけで評価される.

(ii) $\partial\Omega$ が適当に regular で, $u|_{\partial\Omega}\in C^{\beta}(\partial\Omega)$ ならば, $|u|_{\alpha,\Omega}$ は M, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$, β, $|u|_{\beta,\partial\Omega}$, $\partial\Omega$ だけで評価される.

(i) の証明のあら筋. $m>n$ ならば $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{m}(\Omega)$ の関数は Hölder 連続になるから, ここでは $m\leqq n$ と仮定する. weak solution の定

義式 (2) で

$\zeta(x)=\eta^m(x)\max(u(x)-k,0)$, (η は $K(\rho)$ に対する cut-off function, k 任意)

と置く. 適当な計算を行えば次式が得られる.

$$\int_{A(k,\rho)} |\mathrm{grad}\, u|^m \eta^m dx \leqq \gamma' \int_{A(k,\rho)} [\,(u-k)^m |\mathrm{grad}\,\eta|^m + \eta^m\,]\, dx$$

$$\max_{K(\rho)} u - k \leqq \delta \equiv \frac{\nu}{2^{m+2}\mu} \qquad (\gamma'=\gamma'(m,\nu,\mu))$$

$\eta(x)$ を $K(\rho-\sigma\rho)$, $\sigma\in(0,1)$, で 1 に等しくかつ $|\mathrm{grad}\,\eta| \leqq \frac{c}{\sigma\rho}$ なる如く選ぶと

$$\int_{A(k,\rho-\sigma\rho)} |\mathrm{grad}\, u|^m dx \leqq \gamma \left\{ \frac{1}{(\sigma\rho)^m} \max_{A(k,\rho)} [\,u(x)-k\,]^m + 1 \right\} \cdot \mathrm{mes}\, A(k,\rho)$$

が得られる. $-u(x)$ に対しても同様. 従って $u(x)$ は関数空間 $\mathcal{B}_m(\Omega, M, \gamma, \delta, 0)$ に属し, Ω で Hölder 連続になる.

(b) 解の 1 階導関数の maximum norm の評価.

これも内部における評価 $\max_{\Omega'}|\mathrm{grad}\,u|$, $\forall\Omega'\subset\Omega$ と境界 $\partial\Omega$ まで含めた評価 $\max_{\Omega}|\mathrm{grad}\,u|$ とに分けて行われる. 計算が最も難しいのがこの部分である. どの場合でも (a) で得られた Hölder ノルム $|u|_\alpha$ の評価が本質的な役割を果す. 一結果をのべる.

Theorem. 次の仮定をおく.

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqq \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|+|a_i|\right)(1+|p|) + \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| + |f| \leqq \mu(|u|)(1+|p|)^m \qquad (m>1)$$

$u(x)$ が方程式 (1) の weak solution で，２階の広義導関数をもち

$$(*) \qquad \int_\Omega (1+|\mathrm{grad}\,u|)^{m-2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx, \quad \int_\Omega |\mathrm{grad}\,u|^{m+2}\,dx$$

が有限であるならば，$\mathrm{ess.}\max_{\Omega'}|\mathrm{grad}\,u|$ $(\forall\Omega'\subset\Omega)$ は M, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$ $\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ だけで評価される．

a_i, f にもう少し制限を加えると，２階の広義導関数の存在と積分 (*) が有限であるという不自然な仮定をとり除くことができる．領域の境界，境界値が適当な滑かさを持てば，境界を含んだ全域で $\mathrm{grad}\,u$ が評価される．

(C) 解の１階導関数の Hölder norm の評価

Theorem. $u(x)$ は $\overline{W}_2^2(\Omega)$ に属し，$\overline{\Omega}$ で有界な１階導関数 $\mathrm{grad}\,u$ をもち，かつ方程式を満たすとする．さらに

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_i(x,u(x),u_x(x))}{\partial u_{x_j}}\xi_i\xi_j \geqq \nu_1|\xi|^2, \quad \nu>0$$

$$\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial a_i(x,u(x),u_x(x))}{\partial u_{x_j}},\ \frac{\partial a_i}{\partial u},\ \frac{\partial a_i}{\partial x_j},\ f\right| \leqq \mu_1 < \infty \qquad (i,j=1,\dots,n)$$

を満たすものとする．しからば，$\frac{\partial u}{\partial x_k}\in C^\alpha(\Omega)$ $(k=1,\dots,n)$ で，$\alpha>0$ は ν_1, μ_1, $M_1=\max_\Omega|\mathrm{grad}\,u|$ だけに depend する．またノルム $|u|_{1,\alpha,\Omega'}$ $(\forall\Omega'\subset\Omega)$ は ν_1, μ_1, M_1, $\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ だけで評価される．

さらに $u|_{\partial\Omega}=\varphi|_{\partial\Omega}$, $\varphi\in\overline{W}_q^2(\Omega)$ $(q>n)$ で $\partial\Omega$ が滑らかならば，$\frac{\partial u}{\partial x_k}\in C^\beta(\overline{\Omega})$ $(k=1,\dots,n)$ で，$\beta>0$ と $|u|_{1,\beta,\Omega}$ は ν_1, μ_1, M_1, q, $\|\varphi\|_{\overline{W}_q^2(\Omega)}$, $\partial\Omega$ だけで評価される．

weak solution の定義式 (2) で $\zeta = \partial\xi/\partial x_k$ ($\xi \in C_0^\infty$) とおく. 部分積分を行えば

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - f \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \right] dx = 0.$$

これは次のように書かれる:

$$\int_\Omega \left(A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + F_i^k \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, dx = 0$$

$$\begin{cases} A_{ij} = \dfrac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}} \\ F_i^k = \dfrac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + \dfrac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial x_k} - \delta_i^k f(x, u(x), u_x(x)) \end{cases}$$

仮定によって $A_{ij}(x)$, $F_i^k(x)$ は有界である (μ_1 と $M_1 = \max_\Omega |\mathrm{grad}\, u|$ でおさえられる). 従って $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ は §2 で考察したタイプの線型方程式の weak solution と見做される. §2 II-(c) によって $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in C^\alpha(\Omega)$ で, $\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{\alpha, \Omega'}$ ($\forall \Omega' \subset \Omega$) は ν_1, μ_1, M_1, dist $(\Omega', \partial\Omega)$ だけで評価される. これが内部評価のあらましである.

(d) Dirichlet 問題の solvability

Dirichlet 問題

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, u_x)) = f(x, u, u_x), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

を考える. これを次のように書いておく.

$$Q(u) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, u_x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, u_x) = 0$$

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,p) \equiv \dfrac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_j} \\ F(x,u,p) \equiv -f(x,u,p) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial a_i}{\partial u}(x,u,p)p_i + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}(x,u,p) \end{cases}$$

これを1助変数族の方程式

$$Q_\tau(u) \equiv \tau Q(u) + (1-\tau)\left\{ \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1+|u_x|^2)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \hat{\hat{\mu}} u \right\} = 0, \quad \tau \in [0,1]$$

の中に埋め込む。 $Q_1(u) \equiv Q(u)$ である。Dirichlet 問題

$(\mathbb{D}_\tau)$ $\qquad Q_\tau(u) = 0, \qquad u = \tau\phi(x),\ x \in \partial\Omega$

がすべての $\tau \in [0,1]$ に対して solvable であることを Leray-Schauder の不動点定理を用いて示す。

Theorem. 我々の Dirichlet 問題 $(\mathbb{D})$ は次の仮定の下で少くとも一つの解 $u(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ を持つ。

1) a_i, a は $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,0)\xi_i\xi_j \geqq 0$, $\quad F(x,u,0)u \leqq -b_1 u^2 + b_2$ を成立たせるようなものである。($b_1 > 0$, $b_2 \geqq 0$ は定数)

2) $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqq M \equiv \max\left\{ \max_{\partial\Omega}|\phi|, \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \right\}$, $\forall p$ に対して

$$\nu(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}} |\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqq \mu(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}}|\xi|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right| + |a_i| \right)(1+|p|^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| + |f| \leqq \mu(1+|p|^2)^{\frac{m}{2}}$$

$(\nu, \mu = \text{const} > 0,\ m > 1)$

3) $x \in \bar{\Omega}$ $|u| \leqq M$, $|p| \leqq M_1$ (M_1 は前項 (C) でのべた解の1階導関数の評価の定数) に対して a_i, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, a は指数 $\alpha > 0$ の Hölder 條件をみたす。

4) $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$; $\qquad \phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$

$Q_\tau(u) = 0$ を

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, u_x, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, u_x, \tau) = 0$$

の形にかく．$C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ を基礎空間にとり，$C^{1,\beta}(\bar{\Omega}) \ni {}^\forall v$ に線型方程式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, v, v_x, \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, v, v_x, \tau) = 0, \qquad w = \tau\phi, \quad x \in \partial\Omega$$

の解 w を対応させる．この operator を $w = \Phi(v, \tau)$ とする．問題（$\mathbb{D}_\tau$）は operator equation $u = \Phi(u, \tau)$ と同値である．

Leray-Schauder の不動点定理を適用する際最も肝心なことは（$\mathbb{D}_\tau$）の可能なあらゆる解 $u(x, \tau)$ が $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ ノルムで $\tau \in [0, 1]$ に無関係に評価されるという事の検証である．

普通の最大値原理によって直ちに

$$\max_{\Omega} |u(x, \tau)| \leqq M \equiv \max \left\{ \max_{\partial\Omega} |\phi|, \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \right\}$$

が得られる．$Q_\tau(u)$ の中の const. $\hat{\mu}$, $\hat{\hat{\mu}}$ を

$$\hat{\mu} = \frac{\nu}{\min\{m-1, 1\}}, \quad \hat{\hat{\mu}} \leqq \frac{\mu}{M}$$

なる如く選ぶと，解の Hölder ノルム，解の 1 階導関数の maximum ノルム，Hölder ノルムを評価するのに必要な諸定数がすべて τ に無関係であることが容易に確かめられる．従って $|u(x, \tau)|_{1,\beta,\Omega}$ が τ に無関係に有界であるような $\beta > 0$ が定まる．基礎空間の β としてこの β をとればよい．

$\tau = 0$ のとき，問題（$\mathbb{D}_0$）$\{ Q_0(u) = 0 \text{ in } \Omega, \ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \}$ は一意解 $u(x, 0) \equiv 0$ を持つ．また ${}^\forall v \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ に対して $w = \Phi(v, 0) \equiv 0$

なることも分る．それゆえ変換 $v \to v - \Phi(v, 0)$ は恒等変換でその degree は 1 に等しい．これで Leray-Schauder 定理の条件の核心が確かめられた．

(e) 簡単な Dirichlet 問題

$$\Delta u = f(x, u, u_x), \quad x \in \Omega; \qquad u = \phi(x), \quad x \in \partial\Omega$$

を考える． $|f(x, u, p)| \leqq A|p|^2 + B$ とする．

A が小さいか，又は u の Ω 上の振動 ($\operatorname{osc}_{\Omega} u$) が小さいならば，$u$ の導関数の a priori estimates が得られ，従って問題の解の存在が証明されるという事実が以前から分っていた．また $|p|$ の巾を 2 より大きくすれば，regular な解は必らずしも存在しないという事も知られていた．A の大きさが任意であっても解の存在が言えるであろうか？ 暫らくの間 open であった．この問に対する肯定的な解答が Ladyzhenskaya-Ural'tseva の理論によって与えられたのである．

(f) divergence structure をもつ準線型楕円型方程式に関する研究はその他にも数多くあるが，割愛せざるを得ない．注目すべきものとして次の2種を挙げるにとどめる．

(i) 正則変分問題

$$\delta \int_{\Omega} F(u_x)\,dx = 0, \qquad u = \phi \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} F_{p_i p_j}(p)\xi_i \xi_j > 0 \ \text{for } \xi \neq 0, \ \Omega \text{ is strictly convex}, \ \phi \text{ is smooth} \right)$$

に関する Stampacchia [22], Gilbarg [5] の仕事．

(ii) 発散形準線型楕円型方程式 (1) の weak solution の local behavior に関する Serrin [20], [21], Trudinger [25] の研究. local behavior と言うのは, 解の種々のノルムによる評価, Harnack 不等式, Hölder 連続性, 除去可能特異点, 孤立特異点などについての研究の総称である. 方法においても結果においても線型楕円型方程式の研究とかなり overlap する.

§4. 一般形の線型, 準線型楕円型方程式

発散形の楕円型方程式が非常に詳細に研究されているのに対して, 一般形の方程式は

(1) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (a_{ij} \text{ は有界可測})$$

という極く簡単な場合ですら余りよく分っていない. この場合, weak solution をどのような関数空間の中で考えればよいかという基本問題が解決されていないのである.

最近 Aleksandrov [1,2] と Pucci [18] が, Sobolev 空間 W_n^2 を weak solution の範囲にとれば, 最大値原理, 解の一意性, 解の評価などについて或種の結果が得られることを示した. Pucci は論文 [17] で導入した 'extremal elliptic operator' を用いている. この extremal elliptic operator の概念は その後いろいろな方面に利用されているが, その中で注目すべきものは Miller の仕事 [9], [10] である. Miller は Dirichlet 問題の領域の境界点

の正則性について新しい結果をうみ出した.

Landis [8] は (1) 型の方程式の解が Harnack 不等式を満たすことを, 係数 $(a_{ij}(x))$ の固有値に適當な制限を加えて証明した.

一般形の準線型方程式に対する Dirichlet 問題の solvability に関しては Ladyzhenskaya–Ural'tseva の優れた研究がある [7].

参考文献

[1] A. D. Aleksandrov, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika, 1958 (No. 5), 1959 (No. 3, 5), 1960 (No. 3, 5), 1961 (No. 1).

[2] A. D. Aleksandrov, Vestnik Leningrad Univ. Ser. Mat. Mech. Astron. 18 (1963), 5 – 29.

[3] L. Bers – L. Nirenberg, Convegno Int. Eq. Lin. Derivate Parziali, Cremonese Roma (1955), 111 – 140, 141—167.

[4] E. de Giorgi, Mem. Accad. Sci. Torino, Ser. 3, part 1 (1957), 25—43.

[5] D. Gilbarg, Nonlinear Problems, Univ. Wisconsin Press, Madison (1964)

[6] F. John – L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415 – 426.

[7] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Izd. Nauka, Moscow (1964); 英訳 Academic Press (1968).

[8] E. M. Landis, Mat. Sb. 76 (1968), 186 – 213.

[9] K. Miller, Ann. Mat. Pura Appl. 76 (1967), 93 – 105.

[10] K. Miller, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1968), 315 — 330

[11] C. B. Morrey, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126 — 166.

[12] C. B. Morrey, Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer (1966)

[13] J. Moser, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577 — 591.

[14] J. Nash, Amer. J. Math. 80 (1958), 931 — 954.

[15] L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 103 — 156.

[16] O. A. Oleinik – S. N. Kruzhkov, Uspekhi Mat. Nauk 16(5) (1961), 115 — 155.

[17] C. Pucci, Ann. Mat. Pura Appl. 72 (1966), 141 — 170.

[18] C. Pucci, Ann. Mat. Pura Appl. 74 (1966), 15 — 30.

[19] J. Serrin, J. Analyse Math. 4 (1955–1956), 292 - 308.

[20] J. Serrin, Acta Math. 111 (1964), 247 — 302.

[21] J. Serrin, Acta Math. 113 (1965), 219 — 240.

[22] G. Stampacchia, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 505 — 510.

[23] G. Stampacchia, Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 189 — 256.

[24] G. Stampacchia, Int. Symp. Linear Spaces, Jerusalem (1960), 399 - 408.

[25] N. S. Trudinger, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 721 — 747

[26] N. S. Trudinger, Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1968), 108 — 119